

С. Н. Старков

СПРАВОЧНИК
по математическим
формулам
и графикам функций

Санкт-Петербург

«БХВ-Петербург»

2015

УДК 51(03)
ББК 22я2
С77

Старков С. Н.

С77 Справочник по математическим формулам и графикам функций. — СПб.: БХВ-Петербург, 2015. — 352 с.: ил.

ISBN 978-5-9775-3338-6

Справочник содержит 1200 формул и 1200 графиков. В первой части приводятся математические формулы и преобразования по программам средней школы, средних специальных и высших учебных заведений. Вторая часть содержит уникальный сборник графиков функций и изображений линий на плоскости, систематизированных по виду функций, типу и уровню сложности преобразований (элементарных и неэлементарных).

*Для учащихся школ, средних специальных учебных заведений,
студентов вузов, учителей и преподавателей*

УДК 51(03)
ББК 22я2

Группа подготовки издания:

Главный редактор	<i>Екатерина Кондукова</i>
Зам. главного редактора	<i>Людмила Еремеевская</i>
Зав. редакцией	<i>Екатерина Капалыгина</i>
Компьютерная верстка	<i>Ольги Сергиенко</i>
Корректор	<i>Зинаида Дмитриева</i>
Дизайн обложки	<i>Марины Дамбиевой</i>

Подписано в печать 31.07.14.
Формат 60×90^{1/16}. Печать офсетная. Усл. печ. л. 22.
Тираж 2000 экз. Заказ №
"БХВ-Петербург", 191036, Санкт-Петербург, Гончарная ул., 20.

Первая Академическая типография "Наука"
199034, Санкт-Петербург, 9 линия, 12/28

ISBN 978-5-9775-3338-6

© Старков С. Н., 2015
© Оформление, издательство "БХВ-Петербург", 2015

От составителя

Издание охватывает школьную и вузовскую программы по математике.

Часть 1 содержит более 1200 формул элементарной и высшей математики, расположенных в 34 разделах.

Часть 2 содержит более 1200 рисунков, расположенных в 15 разделах. В эту часть вошли графики функций и их преобразования, изображения линий на плоскости, заданных в различной форме, изображения поверхностей второго порядка.

Справочник адресован учащимся и студентам средних, средних специальных и высших учебных заведений, а также учителям и преподавателям.

Содержание

Некоторые обозначения.....	13
ЧАСТЬ 1. ФОРМУЛЫ.....	15
1. Формулы сокращенного умножения и другие тождества.....	16
Разность квадратов • Квадрат разности • Квадрат суммы • Разность кубов • Сумма кубов • Куб разности • Куб суммы • Формула бинома Ньютона	
2. Формулы разложения многочленов на множители.....	17
Разложения на множители некоторых многочленов 2-й, 3-й и 4-й степени • Схема Горнера деления многочлена на двучлен • Теорема о подборе корней многочлена с целочисленными коэффициентами • Разложение многочлена n -й степени на простейшие множители	
3. Действия с дробями.....	19
Сложение, вычитание, умножение и деление рациональных дробей	
4. Средние величины. Пропорции. Проценты	20
Среднее арифметическое • Среднее геометрическое • Среднее гармоническое • Неравенство для средних величин • Основное свойство пропорции • Нахождение неизвестных членов пропорции • Производные пропорции • Проценты	
5. Модуль (абсолютная величина).....	22
Определение и свойства модуля	
6. Степени и корни. Логарифмы.....	23
Степени с натуральным, целым и рациональным показателем • Арифметический корень и его свойства • Свойства степени с действительным показателем • Основное логарифмическое тождество • Свойства логарифмов	

7. Прогрессии..... 25

Арифметическая и геометрическая прогрессии • Свойства
• Вычисление суммы членов прогрессии

8. Решение уравнений..... 26

Решение простейших рациональных, иррациональных, показательных, логарифмических и тригонометрических уравнений • Некоторые равносильные преобразования

9. Решение неравенств 28

Решение простейших рациональных, иррациональных, показательных, логарифмических и тригонометрических неравенств • Некоторые равносильные преобразования

10. Тригонометрические формулы..... 32

Основные тождества • Свойства четности и нечетности • Формулы сложения, кратных углов, половинных углов • Формулы понижения степени • Формулы преобразования суммы в произведение и произведения в сумму • Выражение функций через тангенс половинного угла • Формулы приведения • Обратные тригонометрические функции • Дополнительные тождества • Связь радианной и градусной меры угла • Таблица значений тригонометрических функций

11. Типовые способы замены переменной 37

Замены переменной, используемые при преобразовании выражений, решения уравнений, неравенств и систем

12. Формулы геометрии..... 38

Треугольники • Площадь треугольника • Теорема Пифагора • Теорема синусов • Теорема косинусов • Четырехугольники • Площадь четырехугольника • Окружность и круг • Длина окружности и дуги окружности • Площадь круга и сектора круга • Вычисление объемов и площадей поверхности

13. Векторы 40

Координаты точки на плоскости и в пространстве • Задание вектора в координатной форме • Модуль (длина) вектора • Направляющие косинусы • Единичный, нулевой, противоположный векторы

• Равенство векторов • Сложение и вычитание векторов • Умножение вектора на число • Орт ненулевого вектора • Признак коллинеарности двух векторов • Линейная независимость и линейная зависимость системы векторов • Связь коллинеарности и линейной зависимости двух векторов • Связь компланарности и линейной зависимости трех векторов • Разложение вектора по базису • Преобразование координат на плоскости и в пространстве • Скалярное произведение двух векторов • Угол между векторами • Условие перпендикулярности двух векторов • Векторное произведение двух векторов • Условие коллинеарности двух векторов • Смешанное произведение трех векторов • Условие компланарности трех векторов

14. Прямая на плоскости..... 48

Уравнение прямой, проходящей через заданную точку перпендикулярно заданному вектору • Общее уравнение прямой • Неполные уравнения • Нормальное уравнение прямой • Уравнение прямой в полярных координатах • Уравнение прямой с угловым коэффициентом • Уравнение прямой «в отрезках» • Параметрическое уравнение прямой • Каноническое уравнение прямой • Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки • Угол между двумя прямыми • Условия параллельности, перпендикулярности, пересечения и совпадения двух прямых • Расстояние от точки до прямой • Условие принадлежности трех заданных точек одной прямой

15. Плоскость и прямая в пространстве..... 51

Уравнение плоскости, проходящей через заданную точку перпендикулярно заданному вектору • Общее уравнение плоскости • Неполные уравнения • Нормальное уравнение плоскости • Уравнение плоскости «в отрезках» • Уравнение плоскости, проходящей через три различные точки • Расстояние от точки до плоскости • Угол между двумя плоскостями • Параметрическое уравнение прямой в пространстве • Каноническое уравнение прямой в пространстве • Уравнение прямой в пространстве, проходящей через две различные точки • Угол между прямой и плоскостью • Задание прямой в пространстве как линии пересечения двух плоскостей

16. Уравнения некоторых кривых на плоскости..... 54

Уравнения кривых 2-го порядка: эллипс, окружность, гипербола, парабола • Архимедова спираль • Астроида • Декартов лист

- Улитка Паскаля • Кардиоида • Конхоида Никомеда • Лемниската Бернулли • Локон Аньези • Циклоида • Эпициклоиды • Эпитрохоиды
- Розы • Гипоциклоиды • Гипотрохоиды

17. Канонические уравнения поверхностей 2-го порядка..... 59

- Эллипсоид • Сфера • Однополостной гиперболоид • Двухполостной гиперболоид • Конус 2-го порядка • Эллиптический параболоид
- Гиперболический параболоид • Эллиптический цилиндр
- Гиперболический цилиндр • Параболический цилиндр

18. Определители 60

- Разложение по строке • Алгебраическое дополнение • Минор
- Свойства определителей • Решение системы линейных алгебраических уравнений по формулам Крамера

19. Матрицы..... 63

- Прямоугольные матрицы • Транспонированная, квадратная, треугольная, единичная, нулевая матрицы • Равенство матриц
- Противоположная матрица • Действия с матрицами: сложение, умножение на число, умножение • Вычисление обратной матрицы методом присоединенной матрицы • Решение системы линейных алгебраических уравнений методом обратной матрицы • Ранг матрицы
- Теорема Кронекера — Капелли о совместности систем линейных алгебраических уравнений

20. Пределы и непрерывность..... 67

- Предел числовой последовательности • Свойства сходящихся последовательностей • Критерий Коши сходимости последовательности • Предел функции в точке • Правила вычисления пределов • Односторонние пределы • Условие существования предела
- Пределы функции «на бесконечности» • Бесконечные пределы
- Замечательные пределы • Бесконечно малые и бесконечно большие функции • Таблица эквивалентных бесконечно малых • Непрерывность функции в точке • Точки разрыва • Свойства функций, непрерывных на отрезке

21. Производная и дифференциал 74

- Производная функции в точке • Односторонние производные
- Условие существования производной • Бесконечные производные

• Таблица производных • Правила дифференцирования • Производная сложной функции • Производная обратной функции • Производная функции, заданной параметрически • Производная функции, заданной неявно • Производная показательно-степенной функции • Производные высших порядков • Формулы Тейлора и Маклорена • Теорема Ферма • Необходимое условие экстремума функции • Теорема Ролля • Теорема Лагранжа • Теорема Коши • Правило Лопитала для раскрытия неопределенностей • Уравнения касательной и нормали к графику функции • Дифференциал функции • Приближенные вычисления с помощью дифференциала • Дифференциалы высших порядков

22. Неопределенный интеграл..... 81

Первообразная • Неопределенный интеграл • Свойства неопределенного интеграла • Таблица интегралов • Метод интегрирования с помощью замены переменной • Метод интегрирования по частям • Интегрирование рациональных дробей • Интегралы от некоторых рациональных дробей, иррациональных функций, показательных функций, логарифмических функций, тригонометрических функций

23. Определенный интеграл 89

Связь определенного и неопределенного интеграла • Формула Ньютона — Лейбница • Свойства определенного интеграла • Оценки значения определенного интеграла • Метод интегрирования с помощью замены переменной • Метод интегрирования по частям • Вычисление площадей, длин дуг и объемов с помощью определенного интеграла

24. Несобственные интегралы..... 92

Несобственные интегралы 1-го и 2-го рода • Признаки сходимости и расходимости • Гамма-функция • Значения некоторых несобственных интегралов

25. Частные производные и дифференциалы функций нескольких переменных 95

Частная производная • Производная по направлению • Частные производные высшего порядка • Производные сложной функции • Частные дифференциалы • Полный дифференциал • Дифференциалы n -го порядка • Формула Тейлора • Необходимые условия экстремума

функции • Достаточные условия экстремума функции • Уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности

26. Кратные интегралы 98

Вычисление двойного и тройного интеграла • Свойства двойного и тройного интеграла • Вычисление двойного интеграла в полярных координатах • Вычисление тройного интеграла в цилиндрических и сферических координатах • Вычисление площадей и объемов

27. Криволинейные и поверхностные интегралы101

Вычисление криволинейных интегралов 1-го и 2-го рода • Формула Грина • Вычисление поверхностных интегралов 1-го и 2-го рода • Формула Стокса • Формула Гаусса — Остроградского

28. Дифференциальные операции векторного анализа.....102

Оператор Гамильтона • Градиент функции • Производная функции по направлению • Дивергенция вектор-функции • Ротор вектор-функции • Оператор Лапласа • Дифференциальные операции 2-го порядка

29. Числовые и степенные ряды104

Сходящиеся и расходящиеся числовые ряды • Свойства сходящихся рядов • Необходимое условие сходимости • Знакопостоянные числовые ряды • Достаточные признаки сходимости и расходимости • Знакопеременные и знакочередующиеся числовые ряды • Абсолютная и условная сходимость • Степенные ряды • Разложения функций в степенные ряды • Значения сумм некоторых числовых рядов

30. Тригонометрические ряды Фурье.....110

Общие формулы разложения в ряд • Случаи четной и нечетной функции • Разложения некоторых функций в ряд Фурье

31. Элементы теории обыкновенных дифференциальных уравнений111

Дифференциальные уравнения 1-го порядка: уравнения с разделенными и разделяющимися переменными; уравнение, однородное относительно аргумента и функции; линейное дифференциальное уравнение 1-го порядка; уравнение Бернулли; уравнение в полных дифференциалах • Линейное однородное дифференциальное уравнение 2-го порядка с постоянными коэффициентами • Характеристическое уравнение

• Линейное однородное дифференциальное уравнение n -го порядка с постоянными коэффициентами • Общее решение • Правило нахождения частных решений • Решения некоторых дифференциальных уравнений

32. Комплексные числа117

Степени числа i • Алгебраическая форма комплексного числа • Равенство комплексных чисел • Комплексно сопряженное число • Модуль и аргумент комплексного числа • Тригонометрическая и показательная форма комплексного числа • Действия над комплексными числами в алгебраической, тригонометрической и показательной форме • Формула Муавра • Разложение многочлена на линейные множители • Основная теорема алгебры

33. Элементы теории функций комплексной переменной.....121

Основные функции комплексной переменной • Производная функции комплексной переменной • Условия Коши — Римана • Вычисление интегралов • Формула Ньютона — Лейбница • Теорема Коши • Интегральная формула Коши • Ряды Тейлора • Ряды Лорана • Особые точки • Вычеты • Основная теорема о вычетах

34. Элементы теории вероятностей.....126

Формулы комбинаторики: сочетания, размещения, перестановки • Классическая формула вычисления вероятности • Алгебра событий • Правило сложения вероятностей • Условная вероятность • Независимые события • Правило умножения вероятностей • Формула полной вероятности • Формула Байеса • Повторение испытаний • Формула Бернулли • Законы распределения случайных величин: функция распределения, ряд распределения, плотность распределения • Числовые характеристики случайных величин: математическое ожидание, дисперсия, среднее квадратическое отклонение • Биномиальное распределение • Распределение Пуассона • Равномерное распределение • Нормальное распределение • Неравенство Чебышева

ЧАСТЬ 2. ГРАФИКИ ФУНКЦИЙ	135
35. Графики основных элементарных функций	136
36. Основные типы преобразований графиков	140
37. Преобразования графиков линейных функций	144
38. Преобразования графиков квадратичных функций	164
39. Преобразования графиков многочленов 3-й и 4-й степени	184
40. Преобразования графиков дробно-рациональных функций ...	204
41. Преобразования графиков функций, содержащих рациональные степени и корни	244
42. Преобразования графиков показательных и логарифмических функции	264
43. Преобразования графиков тригонометрических функций	284
44. Графики различных комбинаций элементарных функций	308
45. Изображения неявно заданных зависимостей, содержащих знак модуля	314
46. Изображения зависимостей, заданных параметрически	324
47. Изображения зависимостей, заданных в полярных координатах	332
48. Изображения некоторых кривых на плоскости	334
49. Изображения поверхностей 2-го порядка	336
Литература	339
Алфавитный указатель основных формул	341

Некоторые обозначения

- \mathbb{N} — множество натуральных чисел
- \mathbb{Z} — множество целых чисел
- \mathbb{Q} — множество рациональных чисел
- \mathbb{R} — множество действительных чисел
- \mathbb{C} — множество комплексных чисел
- \emptyset — пустое множество
- $x \in \mathbb{R}$ — x принадлежит множеству \mathbb{R}
- $x \notin \mathbb{R}$ — x не принадлежит множеству \mathbb{R}
- $A \cup B$ — объединение множеств A и B
- $A \cap B$ — пересечение множеств A и B
- $a = b$ — a равно b
- $a \neq b$ — a не равно b
- $a > b$; $a \geq b$ — a больше b ; a больше или равно b
- $a < b$; $a \leq b$ — a меньше b ; a меньше или равно b
- $a \equiv b$ — a тождественно равно b
- $a \approx b$ — a приближенно равно b
- $(a; b)$ — интервал (открытый промежуток), $a < x < b$
- $[a; b)$; $(a; b]$ — полуинтервалы, $a \leq x < b$, $a < x \leq b$
- $[a; b]$ — отрезок (замкнутый промежуток), $a \leq x \leq b$
- $(a; +\infty)$; $[a; +\infty)$; $(-\infty; b)$; $(-\infty; b]$ — числовые лучи,
 $a < x < +\infty$; $a \leq x < +\infty$; $-\infty < x < b$; $-\infty < x \leq b$
- $(-\infty; +\infty)$ — числовая прямая, $-\infty < x < +\infty$

- $U(x_0)$ — окрестность точки x_0 , т. е. любой интервал $(a; b)$, такой что $x_0 \in (a; b)$
- $\dot{U}(x_0)$ — проколотая окрестность точки x_0 , т. е. любой интервал $(a; b)$, такой что $x_0 \in (a; b); x \neq x_0$
- $\forall x$ — любое значение x ; для любого значения x
- $\exists c$ — существует значение c
- $A \Rightarrow B$ — из A следует B (если выполнено A , то выполнено B ;
 A — достаточное условие для B ; B — необходимое условие для A)
- $A \Leftrightarrow B$ — из A следует B и одновременно из B следует A
(A — необходимое и достаточное условие для B ; A и B равносильны)
- $f_1 = g_1 \Leftrightarrow f_2 = g_2$ — уравнения равносильны (эквивалентны)
- $f_1 > g_1 \Leftrightarrow f_2 > g_2$ — неравенства равносильны (эквивалентны)
- $\begin{cases} f_1 = g_1 \\ f_2 = g_2 \end{cases}; \begin{cases} f_1 > g_1 \\ f_2 > g_2 \end{cases}$ — система уравнений; неравенств
- $\begin{bmatrix} f_1 = g_1 \\ f_2 = g_2 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} f_1 > g_1 \\ f_2 > g_2 \end{bmatrix}$ — совокупность уравнений; неравенств
- $\vec{r}(x; y); \vec{r}(x; y; z)$ — радиус-вектор \overline{OM} точки $M(x; y)$
на плоскости; точки $M(x; y; z)$ в пространстве
- $\det \mathbf{A}$ — детерминант (определитель) матрицы \mathbf{A}

Часть 1. Формулы

1. Формулы сокращенного умножения и другие тождества ($n \in \mathbb{N}$)

$$(1.1) a^2 - b^2 = (a - b)(a + b) \text{ — разность квадратов}$$

$$(1.2) (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \text{ — квадрат разности}$$

$$(1.3) (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \text{ — квадрат суммы}$$

$$(1.4) a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab$$

$$(1.5) (a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca)$$

$$(1.6) a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2) \text{ — разность кубов}$$

$$(1.7) a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2) \text{ — сумма кубов}$$

$$(1.8) (a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \text{ — куб разности}$$

$$(1.9) (a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \text{ — куб суммы}$$

$$(1.10) a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b)$$

$$(1.11) a^4 - b^4 = (a - b)(a + b)(a^2 + b^2)$$

$$(1.12) a^4 - b^4 = (a - b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)$$

$$(1.13) (a - b)^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4$$

$$(1.14) (a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

$$(1.15) a^4 + b^4 = (a + b)^4 - 4(a + b)^2 ab + 2a^2b^2$$

$$(1.16) a^4 + b^4 = (a^2 - \sqrt{2}ab + b^2)(a^2 + \sqrt{2}ab + b^2)$$

$$(1.17) a^4 + a^2b^2 + b^4 = (a^2 - ab + b^2)(a^2 + ab + b^2)$$

$$(1.18) a^5 - b^5 = (a - b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4)$$

$$(1.19) a^5 + b^5 = (a + b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4)$$

$$(1.20) a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

$$(1.21) a^{2n} - b^{2n} = (a + b)(a^{2n-1} - a^{2n-2}b + \dots + ab^{2n-2} - b^{2n-1})$$

$$(1.22) a^{2n+1} + b^{2n+1} = (a + b)(a^{2n} - a^{2n-1}b + \dots - ab^{2n-1} + b^{2n})$$

(1.23) Формула бинома Ньютона:

$$\begin{aligned} (a + b)^n &= \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^k = \\ &= a^n + \frac{n}{1} a^{n-1} b + \dots + \frac{n(n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k} a^{n-k} b^k + \dots + b^n \end{aligned}$$

2. Формулы разложения многочленов на множители

□ Разложения на множители некоторых многочленов 2-й, 3-й и 4-й степени

$$(2.1) x^2 \pm 2ax + a^2 = (x \pm a)^2$$

$$(2.2) x^2 - (a + b)x + ab = (x - a)(x - b)$$

$$(2.3) x^3 \pm 3ax^2 + 3a^2x \pm a^3 = (x \pm a)^3$$

$$(2.4) x^3 \pm a^3 = (x \pm a)(x^2 \mp ax + a^2)$$

$$(2.5) x^3 + (a + p)x^2 + (ap + q)x + aq = (x + a)(x^2 + px + q);$$

$$p^2 - 4q < 0$$

$$(2.6) x^3 - (a + 2b)x^2 + (2ab + b^2)x - ab^2 = (x - a)(x - b)^2$$

$$(2.7) x^3 - (a + b + c)x^2 + (ab + bc + ca)x - abc = (x - a)(x - b)(x - c)$$

$$(2.8) x^3 + x - a^3 - a = (x - a)(x^2 + ax + a^2 + 1)$$

$$(2.9) \quad x^3 + x^2 + x - a^3 - a^2 - a = (x - a)[x^2 + (a + 1)x + a^2 + a + 1]$$

$$(2.10) \quad x^4 - a^4 = (x - a)(x + a)(x^2 + a^2)$$

$$(2.11) \quad x^4 - (a^2 + b^2)x^2 + a^2b^2 = (x - a)(x + a)(x - b)(x + b)$$

$$(2.12) \quad x^4 + (a^2 + b^2)x^2 + a^2b^2 = (x^2 + a^2)(x^2 + b^2)$$

$$(2.13) \quad x^4 + a^2x^2 + a^4 = (x^2 - ax + a^2)(x^2 + ax + a^2)$$

$$(2.14) \quad x^4 + a^4 = (x^2 - \sqrt{2}ax + a^2)(x^2 + \sqrt{2}ax + a^2)$$

$$(2.15) \quad x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1 = (x^2 + x + 1)^2$$

□ **Схема Горнера деления многочлена на двучлен**

$$(2.16) \quad \frac{P_n(x)}{x - c} = Q_{n-1}(x) + \frac{R}{x - c} \quad \text{— деление с остатком;}$$

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n;$$

$$Q_{n-1}(x) = b_0x^{n-1} + b_1x^{n-2} + b_2x^{n-3} + \dots + b_{n-2}x + b_{n-1};$$

$$b_0 = a_0; b_1 = a_1 + cb_0; b_2 = a_2 + cb_1; \dots; b_{n-1} = a_{n-1} + cb_{n-2};$$

$$R = P_n(c) = a_n + cb_{n-1};$$

$$P_n(x) = (x - c)Q_{n-1}(x) + R$$

$$(2.17) \quad P_n(c) = 0 \Leftrightarrow \frac{P_n(x)}{x - c} = Q_{n-1}(x) \quad \text{— деление без остатка;}$$

$$P_n(x) = (x - c)Q_{n-1}(x)$$

□ **Теорема о подборе корней многочлена с целочисленными коэффициентами**

(2.18) Если многочлен

$$P_n(x) = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n; \quad a_k \in \mathbb{Z} \quad \forall k$$

имеет целые корни, то они находятся среди делителей свободного члена a_n

□ **Разложение многочлена n -й степени на простейшие множители**

(2.19) Случай n различных действительных корней:

$$\begin{aligned} P_n(x) &= a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n = \\ &= a_0(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n) \end{aligned}$$

(2.20) Случай l действительных корней кратности $k_j; l < n$:

$$\begin{aligned} P_n(x) &= a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n = \\ &= a_0(x-x_1)^{k_1} \dots (x-x_l)^{k_l} (x^2 + p_1x + q_1)^{m_1} \dots (x^2 + p_sx + q_s)^{m_s}; \\ &\quad p_i^2 - 4q_i < 0 \quad \forall i \end{aligned}$$

3. Действия с дробями

(3.1) $\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d \pm c \cdot b}{b \cdot d}$; $b, d \neq 0$ — сложение и вычитание

(3.2) $\frac{a}{b} \pm \frac{c}{b} = \frac{a \pm c}{b}$; $b \neq 0$

(3.3) $\frac{a}{b \cdot e} \pm \frac{c}{d \cdot e} = \frac{a \cdot d \pm c \cdot b}{b \cdot d \cdot e}$; $b, d, e \neq 0$

(3.4) $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$; $b, d \neq 0$ — умножение

(3.5) $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$; $b, c, d \neq 0$ — деление

(3.6) $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$; $b, c, d \neq 0$

(3.7) $\frac{a \cdot c}{b \cdot c} = \frac{a}{b}$; $b, c \neq 0$ — сокращение

$$(3.8) \frac{a}{b} \cdot c = c \cdot \frac{a}{b} = \frac{a \cdot c}{b}; \quad b \neq 0 \text{ — умножение дроби на число и числа на дробь}$$

$$(3.9) \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b} = -\frac{a}{b}; \quad b \neq 0$$

$$(3.10) \frac{a}{b} : c = \frac{a}{b \cdot c}; \quad b, c \neq 0 \text{ — деление дроби на число}$$

$$(3.11) \frac{\frac{a}{b}}{c} = \frac{a}{b \cdot c}; \quad b, c \neq 0$$

$$(3.12) c : \frac{a}{b} = \frac{c \cdot b}{a}; \quad a, b \neq 0 \text{ — деление числа на дробь}$$

$$(3.13) \frac{\frac{c}{a}}{\frac{b}{a}} = \frac{c \cdot b}{a}; \quad a, b \neq 0$$

$$(3.14) \frac{1}{\frac{a}{b}} = \frac{b}{a}; \quad a, b \neq 0$$

4. Средние величины. Пропорции. Проценты

□ Средние величины

$$(4.1) m_a = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n}{n} \text{ — среднее арифметическое } n \text{ чисел}$$

$$(4.2) m_g = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_n} \text{ — среднее геометрическое } n \text{ чисел}$$

$$(4.3) m_h = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \dots + \frac{1}{a_n}} \text{ — среднее гармоническое } n \text{ чисел}$$

(4.4) Неравенство для средних величин: если $a_i > 0 \forall i$,
то $m_a \geq m_g \geq m_h$