В. М. Чуркин

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА: ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ СТАТИКА. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ
ДЛЯ АКАДЕМИЧЕСКОГО БАКАЛАВРИАТА

2-е издание, переработанное и дополненное

Рекомендовано Учебно-методическим отделом высшего образования в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений, обучающихся по инженерно-техническим и естественнонаучным направлениям

Книга доступна в электронной библиотечной системе
biblio-online.ru

Москва ▪ Юрайт ▪ 2018

УДК 531.012(075.8)
ББК 22.21я73
Ч-93

***Автор*:**

Чуркин Валерий Михайлович — профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры теоретической механики факультета прикладной математики и физики Московского авиационного института (национального исследовательского университета), почетный работник высшего профессионального образования Российской Федерации.

***Рецензенты*:**

Маркеев А. П. — профессор, доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник Института проблем механики имени А. Ю. Ишлинского Российской академии наук;

Косенко И. И. — профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры теоретической механики факультета прикладной математики и физики Московского авиационного института (национального исследовательского университета).

Чуркин, В. М.

Ч-93 Теоретическая механика: геометрическая статика. Решение задач : учеб. пособие для академического бакалавриата / В. М. Чуркин. — 2-е изд., перераб. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2018. — 227 с. — (Серия : Бакалавр. Академический курс).

ISBN 978-5-534-05060-8

Пособие содержит решения более двухсот задач отдела «Статика твердого тела» тридцать шестого издания «Сборника задач по теоретической механике» И. В. Мещерского. Кроме подробного изложения решения задач приводятся краткие сведения из теории, которые можно использовать в качестве дополнительного справочного материала.

Для изучающих раздел «Геометрическая статика» курса «Теоретическая механика», может быть полезно преподавателям и студентам университетов, технических вузов и школьникам старших классов.

УДК 531.012(075.8)
ББК 22.21я73

ISBN 978-5-534-05060-8

Оглавление

Предисловие

Предлагаемое пособие предназначено для студентов, изучающих раздел «Геометрическая статика» курса «Теоретическая механика» по программе академического бакалавриата. Оно содержит решения 214 задач отдела «Статика твердого тела» тридцать шестого издания «Сборника задач по теоретической механике» И. В. Мещерского[1].

Материал пособия разбит на четыре основных раздела: «Введение», «Решение задач на приведение системы сил к простейшему виду», «Решение задач на определение координат центра тяжести» и «Решение задач на равновесие». В разделе «Введение» приводятся краткие сведения из теории, которые можно использовать в качестве дополнительного справочного материала при изучении решений представленных в пособии задач. Расположение задач в пособии отличается от расположения задач в «Сборнике задач» И. В. Мещерского. Поэтому задачи имеют двойную нумерацию: первое число означает номер задачи данного пособия, второе — номер задачи из «Сборника задач» И. В. Мещерского. В конце пособия приводится приложение с таблицей, позволяющей по номеру задачи из «Сборника задач» И. В. Мещерского быстро находить ее решение в данном пособии. Решение каждой задачи пособия составлено таким образом, чтобы можно было его изучать, не обращаясь к решениям предыдущих задач подобного типа.

В результате изучения пособия студент должен:

знать

- основные понятия, определения и аксиомы статики;
- основные подходы к формализации и моделированию равновесия механических систем;
- постановку и методы решения задач о равновесии механических систем;
- условия равновесия плоской и пространственной систем сил;
- методы определения координат центров тяжести механических систем;

уметь

- анализировать поставленные задачи и выбирать наиболее рациональные методы их решения;
- составлять расчетные схемы для плоских и пространственных конструкций;
- освобождая рассматриваемую механическую систему от наложенных связей, заменять связи эквивалентными по их воздействию на систему силами реакций связей;

---

[1] *Мещерский И. В.* Сборник задач по теоретической механике : учеб. пособие / под ред. Н. В. Бутенина, А. И. Лурье, Д. Р. Меркина. 36-е изд., исправл. М. : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986.

• преобразовывать системы сил и приводить их к простейшему виду;

• применять знания по теоретической механике при изучении последующих дисциплин;

владеть навыками

• использования методов теоретической механики при решении практических задач;

• применения математического аппарата к решению задач теоретической механики;

• расчета простых и составных конструкций, плоских и пространственных ферм.

Автор надеется, что пособие будет полезно преподавателям и студентам университетов, втузов, школьникам старших классов, а также всем желающим самостоятельно изучить методы решения задач теоретической механики.

Введение

В.1. Основные понятия и задачи геометрической статики

Геометрическая статика — один из разделов теоретической механики, в котором изучаются условия равновесия материальной системы (системы материальных точек) под действием системы сил. В систему сил могут входить как сосредоточенные, так и распределенные силы. Сосредоточенные силы приложены в отдельных (изолированных) точках материальной системы. Сосредоточенная сила **F** является вектором, который характеризуется модулем (величиной), направлением и точкой приложения (рис. В.1). Из аксиом геометрической статики следует, что точку приложения силы можно переносить вдоль линии ее действия (рис. В.2).

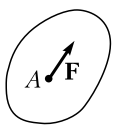

Рис. В.1

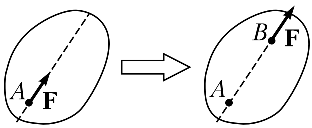

Рис. В.2

Распределенные силы рассредоточены по объемам, поверхностям или линиям звеньев, образующих материальную систему. Действие распределенных сил характеризуется их интенсивностью **q** — силой, приложенной к элементу объема dv, поверхности ds или линии dl. В задачах геометрической статики система распределенных сил (распределенная нагрузка) интенсивностью **q** приводится к сосредоточенной силе (или силам) **Q**, величина которой подсчитывается по формулам:

- $Q = \int\limits_{(V)} q dv$ для системы сил, распределенных по объему V;
- $Q = \int\limits_{(S)} q ds$ для системы сил, распределенных по поверхности площадью S;
- $Q = \int\limits_{(L)} q dl$ для системы сил, распределенных вдоль линии длиной L.

Координаты[1] (x, y, z) точки приложения силы **Q** определяются как координаты центра параллельных сил интенсивностью **q** (см. параграф В.3).

Например, в случаях, когда нагрузка распределена по балке длиной L равномерно (рис. В.3) и по закону треугольника (рис. В.4), будем иметь:

- при $q = q_0$ $Q = \int\limits_0^L q_0 dl = q_0 \cdot L;\ x = L/2;$
- при $q = q_0(1 - 1/L)$ $Q = \int\limits_0^L q_0 \left(1 - \frac{1}{L}\right) dl = q_0 \cdot L/2;\ x = L/3.$

[1] На рисунках и в тексте оси системы координат обозначаются заглавными буквами, а координаты точек — строчными.

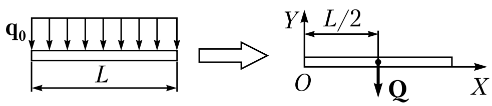

Рис. В.3

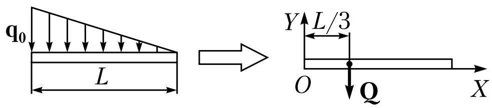

Рис. В.4

Кроме понятия «сила» в геометрической статике вводится понятие «момент силы». *Моментом силы* **F** относительно точки *O* называется вектор $\mathbf{m}_O(\mathbf{F})$, определяемый векторным произведением

$$\mathbf{m}_O(\mathbf{F}) = [\mathbf{r}, \mathbf{F}],$$

где **r** — радиус-вектор точки приложения силы **F**.

Как известно, вектор, равный векторному произведению двух векторов (в данном случае **r** и **F**), перпендикулярен плоскости, в которой лежат сомножители, и направлен в такую сторону, чтобы вращение вокруг этого вектора от первого сомножителя (вектора **r**) ко второму (вектору **F**) происходило в ту же сторону, что и вращение от оси *OX* к оси *OY* вокруг оси *OZ* (рис. В.5). Модуль векторного произведения подсчитывается как удвоенная площадь треугольника, построенного на сомножителях. Поэтому для модуля вектора $\mathbf{m}_O(\mathbf{F})$ имеем

$$m_O(\mathbf{F}) = rF\sin\alpha,$$

или

$$m_O(\mathbf{F}) = hF,$$

где α — угол между векторами **r** и **F**; *h* — плечо силы **F** (кратчайшее расстояние от точки *O* до линии действия силы **F**) (рис. В.6).

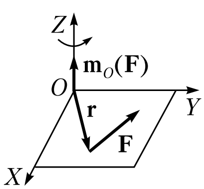

Рис. В.5

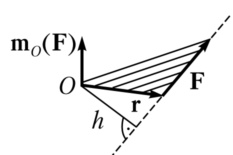

Рис. В.6

Проекции вектора $\mathbf{m}_O(\mathbf{F})$ определяются с помощью определителя

$$\mathbf{m}_O(\mathbf{F}) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}.$$

Отсюда

$$m_{OX}(\mathbf{F}) = yF_z - zF_y;\ \ m_{OY}(\mathbf{F}) = zF_x - xF_z;\ \ m_{OZ}(\mathbf{F}) = xF_y - yF_x. \quad \text{(В.1)}$$

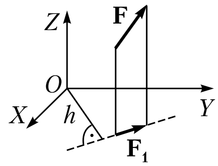

Рис. В.7

Проекция момента силы относительно точки на ось, проходящую через эту точку, называется *моментом силы относительно оси*, или *осевым моментом*. В практических задачах вычисление осевого момента удобнее проводить не по формулам (В.1), а в результате выполнения следующих операций. Сначала сила $\mathbf{F}$, момент которой требуется подсчитать относительно оси OZ, проецируется на плоскость, перпендикулярную оси OZ, т.е. на плоскость XOY (рис. В.7). Затем вычисляется момент силы $\mathbf{F_1}$, лежащей в этой плоскости, относительно точки пересечения оси OZ с плоскостью XOY (точки O). Таким образом, для момента силы $\mathbf{F}$ относительно оси OZ находим

$$m_Z(\mathbf{F}) = m_O(\mathbf{F_1}) = h \cdot F_1. \tag{В.2}$$

Из формулы (В.2) следует, что осевой момент $m_Z(\mathbf{F})$ равен нулю в двух случаях: когда линия действия силы $\mathbf{F}$ параллельна оси OZ (т.е. когда $F_1 = 0$) и когда линия действия силы $\mathbf{F}$ пересекает ось OZ (т.е. когда $h = 0$).

Задачи геометрической статики разделяются на три основных типа: задачи на приведение системы сил к простейшему виду, задачи на определение координат центра тяжести и задачи на равновесие. Остановимся подробнее на каждом из перечисленных типов задач.

В.2. Задачи на приведение системы сил к простейшему виду

При решении задач первого типа заданную систему сил требуется заменить более простой системой. Операция такой замены носит название *приведения системы сил к центру*. Она построена на применении основной теоремы статики (теоремы Пуансо), согласно которой произвольную пространственную систему n сил $\mathbf{F}_i$, $i = 1, ..., n$, можно заменить эквивалентной системой, составленной из двух векторов: результирующей силы $\mathbf{R}$, приложенной в некоторой точке O, и результирующей пары с моментом $\mathbf{M}_O$ (рис. 1.8). При этом точка O называется *центром приведения*, результирующая сила $\mathbf{R}$ — *главным вектором* системы, а момент результирующей пары $\mathbf{M}_O$ — *главным моментом* системы, вычисленным относительно центра O. Главный вектор $\mathbf{R}$ равен геометрической сумме векторов сил системы, а главный момент $\mathbf{M}_O$ — геометрической сумме векторов моментов сил системы, вычисленных относительно центра O:

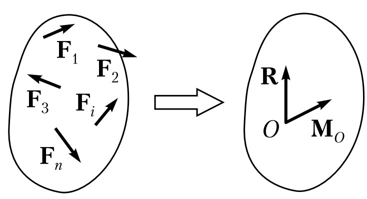

Рис. В.8

$$\mathbf{R} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i; \;\; \mathbf{M}_O = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{m}_O(\mathbf{F}_i). \tag{В.3}$$

Полученная совокупность векторов $\mathbf{R}$ и $\mathbf{M}_O$ с произвольным углом между ними допускает последующее упрощение: приведение к одной паре, к одной силе (равнодействующей) или к динаме. Чтобы ответить на вопрос «к какому простейшему (каноническому) виду приводится рассматриваемая система сил?», необходимо сначала подсчитать модули векторов **R** и $\mathbf{M}_O$.

Очевидно, что если $R = 0$, $M_O \neq 0$, то рассматриваемая система сил приводится к результирующей паре с моментом, равным главному моменту $\mathbf{M}_O$ (рис. В.9).

В случае $R \neq 0$, $M_O = 0$, рассматриваемая система сил приводится к равнодействующей, приложенной в центре приведения O (рис. В.10).

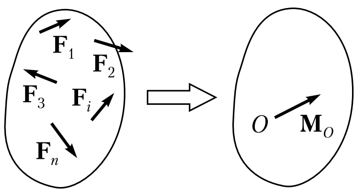

Рис. В.9

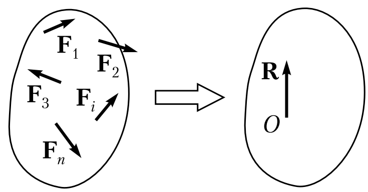

Рис. В.10

Если $R \neq 0$, $M_O \neq 0$, то канонический вид системы определяется по скалярному произведению $(\mathbf{R}, \mathbf{M}_O)$. При $(\mathbf{R}, \mathbf{M}_O) = 0$ главный вектор **R** перпендикулярен главному моменту $\mathbf{M}_O$ (рис. В.11). Такая система сил приводится к равнодействующей, приложенной в точке C, смещенной относительно центра приведения O на расстояние $OC = \dfrac{M_O}{R}$.

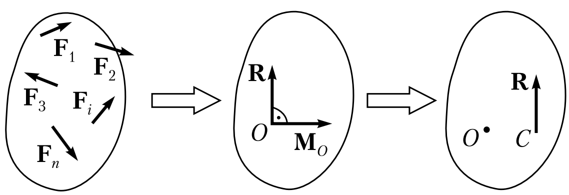

Рис. В.11

При $(\mathbf{R}, \mathbf{M}_O) \neq 0$ система сил приводится к динаме (силовому винту) — совокупности коллинеарных, т.е. направленных по одной прямой векторов **R** и $\mathbf{M}_C$ (рис. В.12). В этом случае главный момент $\mathbf{M}_C$ имеет минимальную величину, равную $M_C = \dfrac{(\mathbf{R}, \mathbf{M}_O)}{R}$, и называется *наименьшим моментом* системы. Прямая, вдоль которой направлены главный вектор **R** и главный момент $\mathbf{M}_C$, носит название *центральной оси* системы. С помощью условия коллинеарности главного вектора и главного момента,

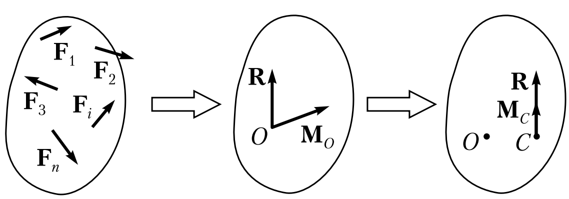

Рис. В.12

представленного в виде равенства $p\mathbf{R} = \mathbf{M}_C$, можно записать уравнение центральной оси системы:

$$\frac{M_{OX} - (yR_z - zR_y)}{R_x} = \frac{M_{OY} - (zR_x - xR_z)}{R_y} = \frac{M_{OZ} - (xR_y - yR_x)}{R_z} = p.$$

Здесь p — параметр динамы. Центральная ось системы является геометрическим местом точек, при выборе которых в качестве центров приведения данная система сил заменяется динамой.

В.3. Задачи на определение координат центра тяжести

В задачах второго типа предполагается, что на материальную систему действуют силы тяжести отдельных ее частей, образующие систему параллельных сил, которая приводится к равнодействующей, равной силе тяжести (весу) всей материальной системы. Требуется определить координаты характерной точки приведения, расположенной на линии действия равнодействующей и называемой *центром тяжести* материальной системы. Определение координат центра тяжести основано на применении теоремы о моменте равнодействующей (теоремы Вариньона). Согласно теореме если система сил приводится к равнодействующей, то момент равнодействующей, вычисленный относительно произвольного центра O, равен сумме моментов слагаемых сил, вычисленных относительно центра O.

Применяя теорему о моменте равнодействующей к системе точечных грузов P_i, $i = 1, ..., n$, можно записать следующие формулы для координат центра тяжести системы:

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} P_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} P_i}; \; y_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} P_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} P_i}; \; z_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} P_i z_i}{\sum_{i=1}^{n} P_i},$$

где x_i, y_i, z_i — координаты точек приложения грузов P_i.

Формулы для определения координат центра тяжести однородного тела объемом V переписываются в виде

$$x_c = \frac{1}{V}\int_{(V)} x dV; \; y_c = \frac{1}{V}\int_{(V)} y dV; \; z_c = \frac{1}{V}\int_{(V)} z dV, \tag{B.4}$$

где x, y, z — координаты элемента объема dV.

Если однородное тело имеет форму плоской поверхности одинаковой толщины по всей площади S, то координаты его центра тяжести подсчитываются по формулам

$$x_c = \frac{1}{S}\int_{(S)} x dS; \; y_c = \frac{1}{S}\int_{(S)} y dS, \tag{B.5}$$

где x, y — координаты элемента площади dS.

Координаты центра тяжести однородного удлиненного тела одинаковой площади сечения вдоль его длины L находятся по формулам

$$x_c = \frac{1}{L}\int\limits_{(L)} x dl;\; y_c = \frac{1}{L}\int\limits_{(L)} y dl;\; z_c = \frac{1}{L}\int\limits_{(L)} z dl, \qquad (B.6)$$

где x, y, z — координаты элемента длины dl.

Иногда расчет координат центра тяжести удается заметно упростить, используя следующие принципы симметрии и разбиения. Если однородное тело симметрично относительно плоскости, оси или центра, то центр тяжести тела располагается соответственно в плоскости, на оси или в центре симметрии. Если однородное тело можно разделить на части, для которых положение центра тяжести известно или легко определяется, то при вычислении координат центра тяжести всего тела вместо формул (B.4)—(B.6) удобно использовать следующие:

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} V_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} V_i};\; y_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} V_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} V_i};\; z_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} V_i z_i}{\sum_{i=1}^{n} V_i};$$

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} S_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} S_i};\; y_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} S_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} S_i};$$

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} L_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} L_i};\; y_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} L_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} L_i};\; z_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} L_i z_i}{\sum_{i=1}^{n} L_i}.$$

Здесь x_i, y_i, z_i — координаты центра тяжести i-й части тела; V_i, S_i, L_i — объем, площадь и длина i-й части тела соответственно.

Поясним применение приведенных выше формул на примерах определения координат центров тяжести объемов, площадей и линий простейших однородных тел.

Координаты центра тяжести площади параллелограмма. Рассмотрим параллелограмм $ABCD$ (рис. B.13). Разобьем его площадь на узкие полосы, параллельные основанию AD. Центр тяжести каждой полосы лежит на ее середине. Геометрическим местом центров тяжести полос, составляющих площадь параллелограмма, служит прямая EF. В свою очередь, центр тяжести прямой EF находится в ее середине, в точке O, которая является точкой пересечения диагоналей параллелограмма. Таким образом, приходим к выводу, что центр тяжести площади параллелограмма совпадает с точкой пересечения его диагоналей.

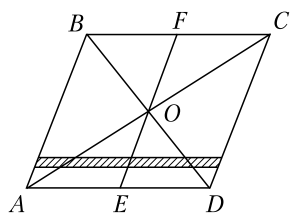

Рис. B.13

Координаты центра тяжести площади треугольника. Площадь треугольника ABC разобьем на бесконечно узкие полосы, параллельные основанию AC (рис. B.14). Центр тяжести каждой полосы лежит на ее середине. Геометрическим местом центров тяжести полос служит прямая BD,

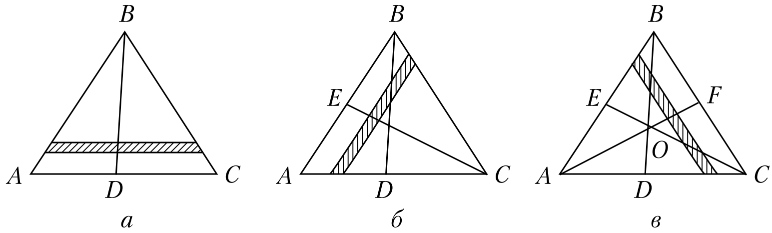

Рис. В.14

которая является медианой треугольника *ABC* (рис. В.14, *а*). Если такую операцию повторить, разбивая площадь треугольника *ABC* на полосы, параллельные стороне *AB* (рис. В.14, *б*) или *BC* (рис. В.14, *в*), то получим в качестве геометрического места центров тяжести полос медиану *CE* (или *AF*). Как известно, медианы пересекаются в одной точке, расположенной на расстоянии одной трети длины каждой медианы до соответствующей ей стороны треугольника. В этой точке и находится центр тяжести площади треугольника *ABC*.

Координаты центра тяжести дуги окружности. С помощью формул (В.6) определим координаты центра тяжести дуги окружности радиусом R с центральным углом $\alpha - \alpha_0$ в заданной системе координат (рис. В.15, *а*). Выделив элемент дуги dl, находим (рис. В.15, *б*):

$$dl = Rd\varphi;\ \ x = R\cos\varphi;\ \ y = R\sin\varphi;\ \ L = (\alpha - \alpha_0)R;$$

$$x_c = \frac{1}{L}\int\limits_{(L)} x\,dl = \frac{\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha} R^2\cos\varphi\, d\varphi}{(\alpha-\alpha_0)R} = \frac{R(\sin\alpha - \sin\alpha_0)}{\alpha-\alpha_0}; \qquad \text{(В.7)}$$

$$y_c = \frac{1}{L}\int\limits_{(L)} y\,dl = \frac{\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha} R^2\sin\varphi\, d\varphi}{(\alpha-\alpha_0)R} = \frac{R(\cos\alpha_0 - \cos\alpha)}{\alpha-\alpha_0}. \qquad \text{(В.8)}$$

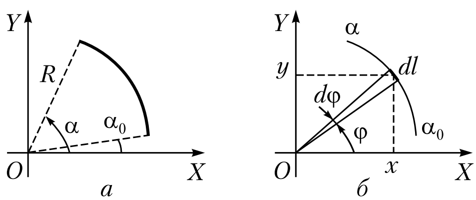

Рис. В.15

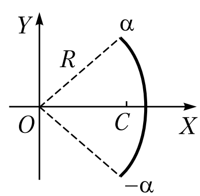

Рис. В.16

Если система координат не задается, то ее удобно выбрать так, как показано на рис. В.16 для дуги окружности с центральным углом 2α. В этом случае $y_c = 0$, а абсцисса x_c подсчитывается по формуле (В.7) при $\alpha_0 = -\alpha$:

$$x_c = \frac{R\sin\alpha}{\alpha}.$$

Координаты центра тяжести площади кругового сектора. Разобьем площадь кругового сектора *OAB* радиусом R с центральным углом $\alpha - \alpha_0$

на элементарные секторы (рис. В.17). Каждый элементарный сектор можно приближенно заменить равнобедренным треугольником с высотой R. Как известно, в равнобедренном треугольнике высота совпадает с медианой, а центр тяжести треугольника лежит в точке пересечения медиан, которая делит каждую из медиан на части в отношении 1 : 2 (см. определение центра тяжести треугольника). Следовательно, центр тяжести каждого элементарного сектора расположен на расстоянии $2/3R$ от начала координат O. Геометрическим местом центров тяжести всех элементарных секторов, составляющих площадь сектора OAB, является дуга окружности радиусом $2/3R$. Поэтому координаты центра тяжести площади сектора OAB находим по формулам (В.7), (В.8) как координаты центра тяжести дуги окружности радиусом $2/3R$:

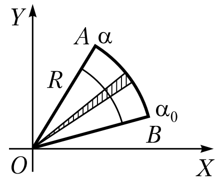

Рис. В.17

$$x_c = \frac{2R(\sin\alpha - \sin\alpha_0)}{3(\alpha - \alpha_0)};\ y_c = \frac{2R(\cos\alpha_0 - \cos\alpha)}{3(\alpha - \alpha_0)}.$$

При симметричном расположении площади сектора радиусом R с центральным углом 2α относительно оси OY будем иметь

$$x_c = \frac{2R\sin\alpha}{3\alpha};\ y_c = 0.$$

Координаты центра тяжести объема параллелепипеда. Объем параллелепипеда $ABDEFGKL$ разобьем на бесконечное множество бесконечно тонких (элементарных) слоев, параллельных основанию $ABDE$ (рис. В.18, *а*). Центр тяжести каждого слоя как центр тяжести площади параллелограмма будет лежать на пересечении его диагоналей. Геометрическим местом центров тяжести множества слоев, образующих параллелепипед, является однородная прямая MN. Центр тяжести прямой MN расположен в ее середине, которая совпадает с точкой пересечения диагоналей параллелепипеда (рис. В.18, *б*). Таким образом, центр тяжести объема параллелепипеда находится в точке C пересечения его диагоналей.

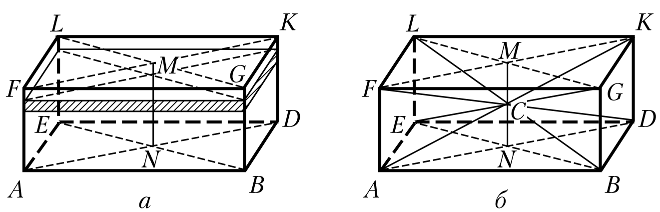

Рис. В.18

Координаты центра тяжести объема пирамиды. Рассмотрим треугольную пирамиду $SABD$ (рис. В.19, *а*). Сначала разобьем ее на бесконечное множество бесконечно тонких (элементарных) слоев, параллельных основанию ABD. Центры тяжести этих слоев лежат на прямой, соединяющей вершину S пирамиды с точкой F — центром тяжести площади ее основания. Так как основанием пирамиды служит треугольник ABD, точка F является точкой пересечения его медиан, т.е. $EF = \dfrac{1}{3}ED$.

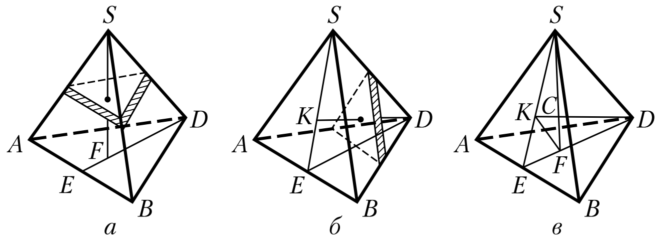

Рис. В.19

Затем разобьем пирамиду на бесконечное множество бесконечно тонких (элементарных) слоев, параллельных грани SAB (рис. В.19, *б*). Центры тяжести этих слоев лежат на прямой, соединяющей вершину D пирамиды с точкой K — центром тяжести площади грани, который совпадает с точкой пересечения медиан треугольника SAB. Таким образом, $EK = \dfrac{1}{3}ES$.

Следовательно, центр тяжести пирамиды должен одновременно находиться и на прямой SF, и на прямой DK, т.е. в точке C пересечения этих прямых (рис. В.19, *в*). Проведем прямую $KF \parallel SD$ и из подобия треугольников KCF и CSD определим положение точки C. Находим

$$\frac{FC}{CS} = \frac{KF}{SD}; \ \frac{KF}{SD} = \frac{EK}{ES} = \frac{EF}{ED} = \frac{1}{3}.$$

Отсюда

$$FC = \frac{CS}{3} = \frac{1}{4}SF; \ SC = \frac{3}{4}SF.$$

Итак, центр тяжести объема треугольной пирамиды расположен на прямой, соединяющей центр тяжести ее основания с вершиной, на расстоянии $\dfrac{1}{4}$ длины этой прямой, считая от основания. Такой же результат получается при определении координат центров тяжести объемов многоугольной пирамиды и конуса.

В.4. Задачи на равновесие

Задачи на равновесие — это основной тип задач геометрической статики. Рассматривается несвободная материальная система. Требуется либо определить усилия, возникающие в связях, наложенных на материальную систему, которая находится в равновесии под действием заданной системы сил, либо установить, является ли данное положение материальной системы, на которую действует заданная система сил, положением равновесия.

Первый шаг при решении задачи на равновесие состоит в освобождении рассматриваемой материальной системы от наложенных связей и замене связей эквивалентными по их действию на материальную систему силами реакций связей. Затем записываются уравнения равновесия, решение которых и позволяет ответить на поставленные в задаче вопросы.

При выполнении первого шага решения задачи сначала необходимо определиться с понятиями «материальная система» и «связи». В зависимости от постановки задачи одна и та же часть конструкции материальной системы может выполнять функции связи или входить в состав материальной системы. Например, в конструкции подвески, показанной на рис. В.20, *а*, за материальную систему можно принять обе балки AB и CD, соединенные шарниром D, а связями считать шарнирные опоры A и C. После освобождения такой системы от связей в шарнирах A и C необходимо приложить силы реакций $\mathbf{R}_A$ и $\mathbf{R}_C$, которые по своему действию на систему эквивалентны действию опор A и C (рис. В.20, *б*). Если же в качестве материальной системы выбирается одна из балок, например AB, то связями для нее будут являться шарнирная опора A и балка CD. После освобождения балки AB от связей в шарнирах A и D необходимо приложить силы реакций $\mathbf{R}_A$ и $\mathbf{R}_D$ (рис. В.20, *в*).

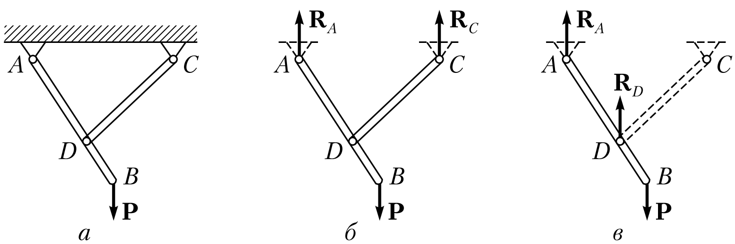

Рис. В.20

При освобождении материальной системы от наложенных связей необходимо учитывать заданные в условии задачи особенности конструктивных элементов, реализующих эти связи. Так, если из условия задачи следует, что реализацией связи для рассматриваемой материальной системы служит опора в виде гладкой поверхности, то это означает, что условием задачи задано направление линии действия силы реакции связи $\mathbf{R}$: вектор $\mathbf{R}$ будет направлен перпендикулярно плоскости, касательной к опорной поверхности (рис. В.21). На рис. В.22 показан другой вариант конструктивной реализации связи с заданным направлением линии действия силы реакции: вектор $\mathbf{R}$ направлен перпендикулярно плоскости, на которой установлена подвижная цилиндрическая шарнирная опора материальной системы.

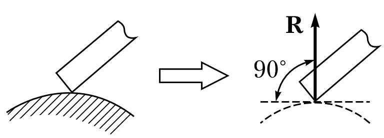

Рис. В.21

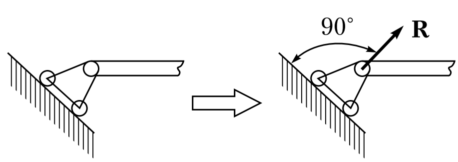

Рис. В.22

В случае, когда реализацией связи служит шероховатая опорная поверхность, т.е. учитывается трение скольжения (рис. В.23), сила реакции связи $\mathbf{R}$ представляется суммой

$$\mathbf{R} = \mathbf{N} + \mathbf{F}_{\text{тр}},$$

где **N** — нормальная реакция, соответствующая реакции гладкой поверхности; $\mathbf{F_{тр}}$ — сила трения скольжения, расположенная в плоскости, касательтельной к опорной поверхности, $F_{тр} \leqslant fN$; f — коэффициент трения скольжения.

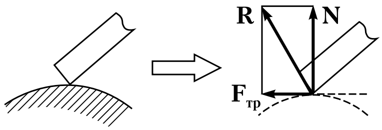

Рис. В.23

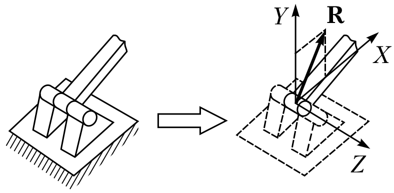

Рис. В.24

Если по условию задачи связь, наложенная на материальную систему, выполнена в виде неподвижной цилиндрической шарнирной опоры, то это означает, что сила реакции связи **R** лежит в плоскости XOY, перпендикулярной оси опоры OZ (рис. В.24).

При освобождении материальной системы от сферической шарнирной опоры (подпятника) у эквивалентной силы реакции такой связи **R** неизвестными являются и линия действия, и плоскость, в которой она располагается (рис. В.25). Модуль и направление силы **R** (составляющих $\mathbf{R}_x$, $\mathbf{R}_y$, $\mathbf{R}_z$) определяются в ходе решения задачи на равновесие.

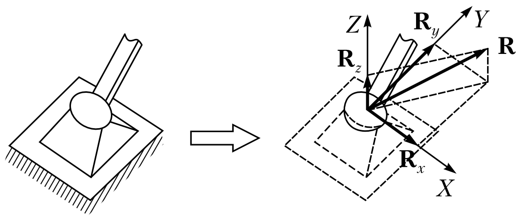

Рис. В.25

Следует иметь в виду, что в некоторых простейших случаях линию действия силы реакции неподвижной шарнирной опоры можно определить с помощью первой аксиомы статики или теоремы о трех непараллельных силах.

Первая аксиома статики (аксиома об уравновешенных силах) гласит, что две силы образуют уравновешенную систему сил, если эти силы равны по модулю и направлены по одной прямой в противоположные стороны.

Если, например, невесомая балка при помощи цилиндрических (или сферических) шарниров соединяет материальную систему с неподвижной опорой, то на балку будут действовать только две силы — силы реакций в шарнирах. Поэтому на основании первой аксиомы статики можно утверждать, что эти силы будут направлены по прямой, которая соединяет шарниры. По этой прямой будет направлена и сила реакции, действующая со стороны балки на материальную систему. К аналогичному выводу приходим, когда связь выполнена в виде невесомого стержня, троса или нити.

Теорема о трех непараллельных силах используется в случаях, когда на систему действует только три силы, расположенные в одной плоскости, и для двух из них известна точка пересечения линий действия. Согласно теореме о трех непараллельных силах линия действия третьей силы будет проходить через ту же точку.

Например, для материальной системы, составленной из балки *AB* и невесомого стержня *CD*, как показано на рис. В.26, *а*, связями служат неподвижные цилиндрические опоры *A* и *D*. В общем случае исходя из конструктивной реализации таких связей можно только утверждать, что их силы реакций $\mathbf{R}_A$ и $\mathbf{R}_D$ лежат в плоскости, перпендикулярной осям опор *A* и *D*. Но в данной задаче стержень *CD* считается невесомым. Поэтому сила $\mathbf{R}_D$ будет направлена вдоль прямой, соединяющей шарниры *C* и *D*, т.е. вдоль стержня *CD*.

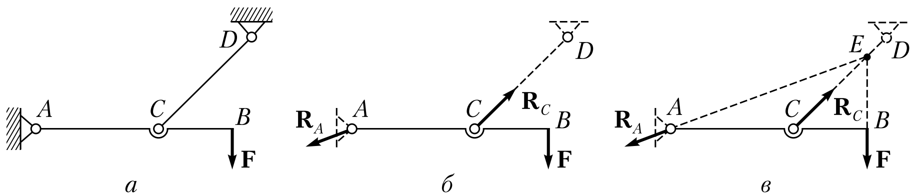

Рис. В.26

Если теперь за материальную систему принять балку *AB*, а связями считать опору *A* и стержень *CD*, то после освобождения балки от связей и замены связей силами реакций $\mathbf{R}_A$ и $\mathbf{R}_C$ балка будет находиться в равновесии под действием трех непараллельных сил $\mathbf{F}$, $\mathbf{R}_A$ и $\mathbf{R}_C$, расположенных в вертикальной плоскости (рис. В.26, *б*). Учитывая, что сила $\mathbf{R}_C$ равна по величине и противоположна по направлению силе $\mathbf{R}_D$, находим точку *E* — точку пересечения линий действия сил $\mathbf{F}$ и $\mathbf{R}_C$. Затем на основании теоремы о трех непараллельных силах проводим линию действия силы $\mathbf{R}_A$, соединяя точки *A* и *E* (рис. В.26, *в*).

Более сложной связью, чем шарнирная опора (в отношении ее силового воздействия на материальную систему), является жесткая заделка (рис. В.27). После освобождения от жесткой заделки к материальной системе кроме силы реакции $\mathbf{R}$ необходимо приложить пару сил с моментом $\mathbf{M}$. Модуль и направление векторов $\mathbf{R}$ и $\mathbf{M}$ (составляющих $\mathbf{R}_x$, $\mathbf{R}_y$, $\mathbf{R}_z$ и $\mathbf{M}_x$, $\mathbf{M}_y$, $\mathbf{M}_z$) определяются в ходе решения задачи на равновесие.

Силы реакций, полученные в результате освобождения материальной системы от наложенных связей, вместе с заданными условием задачи активными силами образуют систему сил, под действием которой рассматриваемая материальная система находится в равновесии. В случае произ-

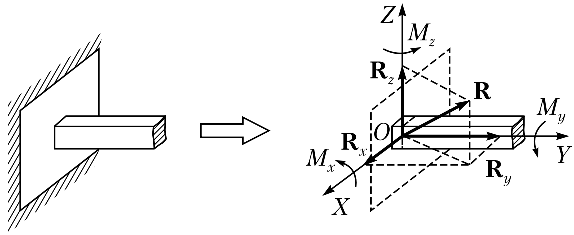

Рис. В.27

вольной пространственной системы сил необходимые и достаточные условия равновесия выражаются двумя следующими векторными уравнениями:

$$\mathbf{R} = 0;\ \ \mathbf{M}_O = 0, \tag{В.9}$$

где $\mathbf{R}$ и $\mathbf{M}_O$ — главный вектор и главный момент системы сил.

С учетом формул (В.3) уравнения (В.9) переписываются в виде

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i = 0;\ \ \sum_{i=1}^{n} \mathbf{m}_O(\mathbf{F}_i) = 0. \tag{В.10}$$

Проецируя векторные уравнения (В.10) на оси декартовой системы координат $OXYZ$, получим скалярные уравнения равновесия произвольной пространственной системы сил

$$\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0;\ \ \sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0;\ \ \sum_{i=1}^{n} F_{iz} = 0;$$

$$\sum_{i=1}^{n} m_x(\mathbf{F}_i) = 0;\ \ \sum_{i=1}^{n} m_y(\mathbf{F}_i) = 0;\ \ \sum_{i=1}^{n} m_z(\mathbf{F}_i) = 0,$$

где F_{ix}, F_{iy}, F_{iz} — проекции силы $\mathbf{F}_i$ на оси OX, OY и OZ; $m_x(\mathbf{F}_i)$, $m_y(\mathbf{F}_i)$, $m_z(\mathbf{F}_i)$ — моменты силы $\mathbf{F}_i$ относительно осей OX, OY и OZ.

При составлении уравнений равновесия необходимо обратить внимание на число уравнений: их должно быть не больше шести. Если в записываемых для данной материальной системы уравнениях равновесия неизвестных оказывается больше шести, то эти уравнения следует дополнить уравнениями равновесия другой материальной системы, которая конструктивно связана с первой системой (входит в ее состав или, наоборот, содержит первую систему в качестве своей составной части).

Для плоской системы сил число уравнений равновесия сокращается до трех. Если выбрать систему координат так, чтобы все силы располагались, например, в плоскости XOY, то уравнения равновесия принимают такой вид:

$$\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0;\ \ \sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0;\ \ \sum_{i=1}^{n} \mathbf{m}_O(\mathbf{F}_i) = 0. \tag{В.11}$$

Здесь $m_O(\mathbf{F}_i)$ — момент силы $\mathbf{F}_i$ относительно точки O (оси OZ). Так как система координат выбирается произвольно, точка O — любая точка на плоскости XOY.

Уравнениями (В.11) выражается первая, наиболее распространенная форма условий равновесия плоской системы сил. Существуют еще две формы условий равновесия, применяемые для исследования плоской системы сил. Вместо уравнений (В.11) можно использовать следующие системы:

$$\sum_{i=1}^{n} m_A(\mathbf{F}_i) = 0;\ \ \sum_{i=1}^{n} m_B(\mathbf{F}_i) = 0;\ \ \sum_{i=1}^{n} m_C(\mathbf{F}_i) = 0; \tag{В.12}$$

$$\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0;\ \ \sum_{i=1}^{n} m_A(\mathbf{F}_i) = 0;\ \ \sum_{i=1}^{n} m_B(\mathbf{F}_i) = 0. \tag{В.13}$$

В уравнениях (В.12) составляются суммы моментов сил относительно точек A, B и C, не лежащих на одной прямой (вторая форма условий равновесия плоской системы сил). Система (В.13) состоит из двух уравнений моментов сил относительно произвольных точек A, B и уравнения проекций сил на ось OX, не перпендикулярную AB (третья форма условий равновесия плоской системы сил).

Для плоской системы сил наибольшее число уравнений равновесия — три. Если уравнения равновесия содержат больше трех неизвестных, то, как и в случае с пространственной системой сил, записываются дополнительные уравнения, описывающие равновесие другой материальной системы, конструктивно связанной с первой.

Глава 1
РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ НА ПРИВЕДЕНИЕ СИСТЕМЫ СИЛ К ПРОСТЕЙШЕМУ ВИДУ

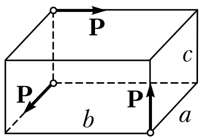

Рис. 1.1

Задача 1.1 (7.2). По трем непересекающимся и непараллельным ребрам прямоугольного параллелепипеда действуют три равные по модулю силы **P** (рис. 1.1). Какое соотношение должно существовать между ребрами a, b и c, чтобы эта система приводилась к равнодействующей?

Решение

Система сил приводится к равнодействующей, если при $\mathbf{R} \neq 0$ соблюдается условие

$$(\mathbf{R}, \mathbf{M}_O) = 0. \tag{1}$$

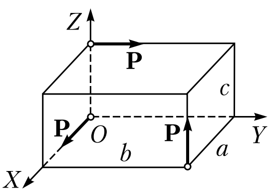

Рис. 1.2

Поэтому для решения задачи необходимо подсчитать модуль главного вектора **R** и скалярное произведение (**R**, $\mathbf{M}_O$). Выбрав систему координат, находим проекции главного вектора и главного момента (рис. 1.2):

$$R_x = \sum_{i=1}^{n} F_{ix} = P;\ R_y = \sum_{i=1}^{n} F_{iy} = P;\ R_z = \sum_{i=1}^{n} F_{iz} = P;$$

$$M_x = \sum_{i=1}^{n} m_x(\mathbf{F}_i) = Pb - Pc;\ M_y = \sum_{i=1}^{n} m_y(\mathbf{F}_i) = -Pa;\ M_z = \sum_{i=1}^{n} m_z(\mathbf{F}_i) = 0.$$

Отсюда

$$(\mathbf{R}, \mathbf{M}_O) = R_x M_x + R_y M_y + R_z M_z = P(Pb - Pc) - P^2 a.$$

Таким образом, в данном случае $R \neq 0$, а для выполнения условия (1) необходимо потребовать, чтобы

$$P(Pb - P\text{c}) - P^2 a = 0,$$

т.е. чтобы

$$b - c = a. \tag{2}$$

Равенство (2) и является искомым соотношением между ребрами a, b и c, обеспечивающим приведение данной системы к равнодействующей.

Задача 1.2 (7.3). К четырем вершинам A, H, B и D куба приложены четыре равные по модулю силы: $P_1 = P_2 = P_3 = P_4 = P$, причем сила $\mathbf{P_1}$ на-

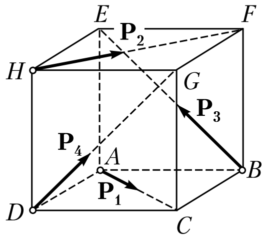

Рис. 1.3

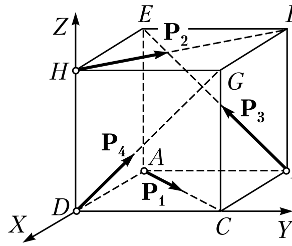

Рис. 1.4

правлена по AC, $\mathbf{P_2}$ — по HF, $\mathbf{P_3}$ — по BE, $\mathbf{P_4}$ — по DG (рис. 1.3). Привести эту систему к простейшему виду.

Решение

Выбираем систему координат с началом в точке D и, полагая, что ребро куба имеет длину a, находим проекции векторов $\mathbf{R}$ и $\mathbf{M}_O$ (рис. 1.4):

$$R_x = \sum_{i=1}^{n} F_{ix} = -P_2\frac{\sqrt{2}}{2} + P_4\frac{\sqrt{2}}{2} = 0;$$

$$R_y = \sum_{i=1}^{n} F_{iy} = P_1\frac{\sqrt{2}}{2} + P_2\frac{\sqrt{2}}{2} - P_3\frac{\sqrt{2}}{2} + P_4\frac{\sqrt{2}}{2} = P\sqrt{2};$$

$$R_z = \sum_{i=1}^{n} F_{iz} = P_1\frac{\sqrt{2}}{2} + P_3\frac{\sqrt{2}}{2} = P\sqrt{2};$$

$$M_x = \sum_{i=1}^{n} m_x(\mathbf{F}_i) = -aP_2\frac{\sqrt{2}}{2} + aP_3\frac{\sqrt{2}}{2} = 0;$$

$$M_y = \sum_{i=1}^{n} m_y(\mathbf{F}_i) = -aP_2\frac{\sqrt{2}}{2} + aP_3\frac{\sqrt{2}}{2} = 0;$$

$$M_z = \sum_{i=1}^{n} m_y(\mathbf{F}_z) = aP_3\frac{\sqrt{2}}{2} - aP_4\frac{\sqrt{2}}{2} = 0.$$

Отсюда

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} = 2P;\ M_O = 0.$$

Так как $R \neq 0$, а $M_O = 0$, данная система сил приводится к равнодействующей, имеющей модуль $R = 2P$ и приложенной в начале координат $D \equiv O$. Расположение вектора $\mathbf{R}$ в выбранной системе координат определяется его проекциями (рис. 1.5).

Примечание. Если в качестве начала координат (центра приведения) выбрать другую точку, например точку A, то в результате получим $R \neq 0$; $M_O \neq 0$; $(\mathbf{R}, \mathbf{M}_O) = 0$. Это означает, что данная система сил в точке A приводится к главному вектору $\mathbf{R}$ и главному моменту $\mathbf{M}_O$, причем $\mathbf{R} \perp \mathbf{M}_O$. Такая система допускает последующее упрощение: переменой центра приведения (переносом его из точки A в точку D) система приводится к одному вектору — равнодействующей $\mathbf{R}$, приложенной в точке D.

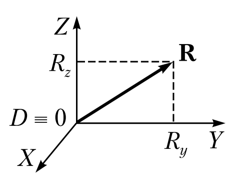

Рис. 1.5

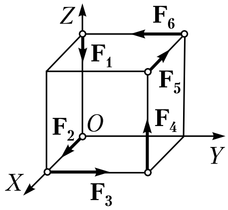

Рис. 1.6

Задача 1.3 (7.5). К вершинам куба, ребра которого имеют длину a = 5 см, приложены, как указано на рис. 1.6, шесть равных по модулю сил, по 2 Н каждая. Привести эту систему сил к простейшему виду.

Решение

Приведение системы к простейшему виду начинаем с подсчета проекций главного вектора **R** и главного момента $\mathbf{M}_O$:

$$R_x = \sum_{i=1}^{n} F_{ix} = F_2 - F_5 = 0;\ \ R_y = \sum_{i=1}^{n} F_{iy} = F_3 - F_6 = 0;$$

$$R_z = \sum_{i=1}^{n} F_{iz} = -F_1 + F_4 = 0;$$

$$M_x = \sum_{i=1}^{n} m_x(\mathbf{F}_i) = aF_4 + aF_6 = 20\ \text{Н}\cdot\text{см};$$

$$M_y = \sum_{i=1}^{n} m_y(\mathbf{F}_i) = -aF_4 - aF_5 = -20\ \text{Н}\cdot\text{см};$$

$$M_z = \sum_{i=1}^{n} m_z(\mathbf{F}_i) = aF_3 + aF_5 = 20\ \text{Н}\cdot\text{см}.$$

Отсюда

$$R = 0;\ M_O = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2} = 20\sqrt{3}\ \text{Н}\cdot\text{см}.$$

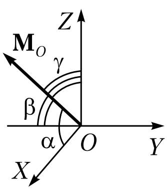

Рис. 1.7

Таким образом, данная система приводится к одному вектору $\mathbf{M}_O$ — вектору момента пары, который составляет с осями системы координат углы α, β и γ (рис. 1.7). Косинусы этих углов определяются соотношениями

$$\cos\alpha = \frac{M_x}{M_O} = \frac{\sqrt{3}}{3};\ \cos\beta = \frac{M_y}{M_O} = -\frac{\sqrt{3}}{3};\ \cos\gamma = \frac{M_z}{M_O} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Задача 1.4 (7.6). Систему сил: P_1 = 8 Н, направленную по оси OZ, и P_2 = 12 Н, направленную параллельно оси OY, как показано на рис. 1.8, где OA = 1,3 м, привести к каноническому виду, определив величину главного вектора **R** всех этих сил и величину их главного момента **M** относительно произвольной точки, взятой на центральной винтовой оси. Найти углы α, β и γ, составляемые центральной винтовой осью с координатными осями, а также координаты x и y точки встречи ее с плоскостью OXY.

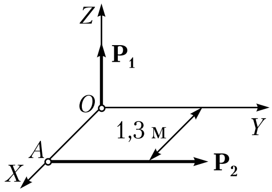

Рис. 1.8

Решение

Приведение заданной системы к каноническому (простейшему) виду начинаем с определения проекций главного вектора **R** и главного момента $\mathbf{M}_O$ относительно центра O: